УДК 517.98

Аналитическое продолжение сферических функций непрерывной серии для однополостного гиперболоида [7]

© В. Ф. Молчанов

Ключевые слова: однополостный гипербололид, комплексные оболочки, сферические функции

Для однополостного гипербололида в трехмерном пространстве построены 4 комплексные оболочки, изучен вопрос о продолжении на эти оболочки сферических функций различных серий (непрерывной, голоморфной и антиголоморфной).

For the hyperboloid of one sheet in the three dimensional space, we construct 4 complex hulls and coninuate analytically on them spherical functions of different series (continuous, holomorphic and antiholomorphic)

В этой работе мы даем характеризацию сферических функций *непрерывной* серии на однополостном гиперболоиде $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$ с помощью комплексных оболочек.

В разложение квазирегулярного представления группы $G = \mathrm{SO}_0(1,2)$ на $\mathcal{X}$ входят неприводимые унитарные представления непрерывной и дискретных (голоморфной и антиголоморфной) серий группы G. Само разложение эквивалентно разложению дельта-функции на $\mathcal{X}$ по сферическим функциям этих серий. Ранее было известно (Молчанов), что сферические функции *дискретных* серий могут быть продолжены аналитически на некоторые комплексные многообразия (комплексные оболочки гиперболоида $\mathcal{X}$).

Аналогичный вопрос (более сложный) для сферических функций непрерывной серии не был изучен. В этой работе мы сначала строим 4 комплексные оболочки $\mathcal{Y}^+$, $\mathcal{Y}^-$, Ω^+ и Ω^- гиперболоида $\mathcal{X}$.

Сферические функции *дискретных* серий могут быть продолжены аналитически на первые два многообразия. Это факт содержится, в частности, в работе [3], в которой рассматривается общий случай гиперболоидов эрмитова типа G/H в $\mathbb{R}^n$, где $G = \mathrm{SO}_0(p,2)$, $H = \mathrm{SO}_0(p,1)$, $n = p+2$.

Интерес представляет аналитическое продолжение сферических функций *непрерывной* серии на комплексные многообразия. По-видимому, это можно сделать для однополостных гиперболоидов G/H в $\mathbb{R}^n$, где $G = \mathrm{SO}_0(1,q)$, $H =$

[7] Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

$\mathrm{SO}_0(1, q-1)$, $n = 1 + q$. Наш гиперболоид $\mathcal{X} = G/H$ в $\mathbb{R}^3$, где $G = \mathrm{SO}_0(1,2)$, $H = \mathrm{SO}_0(1,1)$, есть одновременно гиперболоид обоих указанных типов.

Наша цель – построить аналитическое продолжение сферических функций непрерывной серии для ключевого случая – нашего гиперболоида – на комплексные многообразия, а именно, на оболочки $\Omega^\pm$.

Здесь обнаруживается следующий интересный факт. Сферические функции голоморфной и антиголоморфной серий продолжаются на одно из многообразий $\mathcal{Y}^\pm$, каждое на свое: голоморфная серия – на $\mathcal{Y}^+$, антиголоморфная серия – на $\mathcal{Y}^-$, см. [2], [3]. В противоположность этому непрерывная серия требует присутствия *обоих* многообразий $\Omega^\pm$: сферическая функция есть полусумма предельных значений из Ω^+ и Ω^-.

§ 1. Комплексные оболочки

Рассмотрим однополостный гиперболоид $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$, он задается уравнением $[x,\, x] = 1$, где $[x,\, y]$ – следующая билинейная форма в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$[x,\, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{1.1}$$

Его размерность равна 2. Пусть $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ – комплексное расширение гиперболоида $\mathcal{X}$ (комплексный гиперболоид). Оно получается следующим образом. Распространим билинейную форму $[x,\, y]$ на пространство $\mathbb{C}^3$ формулой (1.1). Тогда $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ – это множество точек x в $\mathbb{C}^3$, удовлетворяющих уравнению $[x,\, x] = 1$. Его комплексная размерность равна 2.

Мы будем считать, что группа $G = \mathrm{SO}_0(1,2)$ действует на $\mathbb{R}^3$ линейно справа: $x \mapsto xg$ (в соответствии с этим мы пишем векторы в виде строки). Это линейное действие $x \mapsto xg$ распространяется на $\mathbb{C}^3$. На самом гиперболоиде $\mathcal{X}$ группа G действует транзитивно, но на его комплексификации $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ действие группы G не транзитивно.

В этом параграфе мы определим некоторые комплексные многообразия в $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ комплексной размерности 2, инвариантные относительно G. Они максимальные в некотором смысле, группа G действует на своих орбитах в них просто транзитивно, так что эти орбиты диффеоморфны группе G (и имеют вещественную размерность 3). Гиперболоид $\mathcal{X}$ целиком входит в границы каждого из этих многообразий. Назовем их "комплексными оболочками" гиперболоида $\mathcal{X}$.

Нам будет нужна группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и ее подгруппа $\mathrm{SU}(1,1)$. Они состоят соответственно из матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

с определителем 1. Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действует на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (сфере Римана) дробно-линейно:

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}.$$

Это действие транзитивно. При этом подгруппа $\mathrm{SU}(1,1)$ имеет три орбиты на $\overline{\mathbb{C}}$: открытый круг $D : z\overline{z} < 1$, его внешность $D' : z\overline{z} > 1$, и окружность $S : z\overline{z} = 1$.

Обозначим группу $\mathrm{SU}(1,1)$ через G_1, тогда группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ есть естественно ее комплексификация $G_1^{\mathbb{C}}$.

Группа G_1 гомоморфно отображается на группу G – следующим образом. Отождествим пространство $\mathbb{R}^3$ с пространством матриц

$$x = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда действие $x \mapsto g^{-1}xg$ группы G_1 на этих матрицах x есть действие $x \mapsto xg$ группы G на векторах x.

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты. Это комплексные числа u, v, лежащие на единичной окружности S, причем $u \neq v$. Точка $x \in \mathcal{X}$ с координатами u, v есть

$$x = \left(\frac{u+v}{i(u-v)}, \frac{1-uv}{u-v}, \frac{1+uv}{i(u-v)} \right).$$

Обратное отображение $x \mapsto (u, v)$ задается формулами

$$u = \frac{x_3 + ix_2}{x_1 + i}, \quad v = \frac{x_3 + ix_2}{x_1 - i}. \tag{1.2}$$

Оно вкладывает гиперболоид $\mathcal{X}$ в тор $S \times S$, образом является тор без диагонали $\{u = v\}$, диагональ - это граница гиперболоида.

Когда точка $x \in \mathcal{X}$ преобразуется элементом $g \in G$, ее координаты (u, v) подвергаются дробно-линейному преобразованию: $u \mapsto u \cdot g_1$, $v \mapsto v \cdot g_1$, где g_1 – элемент группы G_1, который переходит в $g \in G$ при указанном гомоморфизме $G_1 \to G$.

Аналогично введем орисферические координаты z, w на $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$: точка $x \in \mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ есть

$$x = \left(\frac{z+w}{i(z-w)}, \frac{1-zw}{z-w}, \frac{1+zw}{i(z-w)} \right), \tag{1.3}$$

где переменные z, w пробегают расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, с условием $z \neq w$. Обратное отображение задается формулами

$$z = \frac{x_3 + ix_2}{x_1 + i}, \quad w = \frac{x_3 + ix_2}{x_1 - i}. \tag{1.4}$$

Эти формулы, первоначально определенные для $x_1 \neq \pm i$, распространяются по непрерывности на всех $x \in \mathcal{X}^{\mathbb{C}}$. А именно, точки $x = (i, i\lambda, \lambda)$, $x = (-i, i\lambda, \lambda)$, $\lambda \neq 0$, имеют координаты $(0, i/\lambda)$, $(-i/\lambda, 0)$, соответственно, и точки $x = (i, -i\lambda, \lambda)$, $x = (-i, -i\lambda, \lambda)$ имеют координаты $(-i\lambda, \infty)$ и $(\infty, i\lambda)$, соответственно.

Таким образом, формулы (1.4) дают вложение $X^{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, образом является $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ без диагонали.

Справедливы следующие соотношения. Пусть точки x и y на $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ имеют координаты (z, w) и (λ, μ) соответственно. Тогда

$$[x,\, y] - 1 = -\frac{2(z-\lambda)(w-\mu)}{(z-w)(\lambda-\mu)}, \tag{1.5}$$

$$[x,\, y] + 1 = -\frac{2(z-\mu)(w-\lambda)}{(z-w)(\lambda-\mu)}. \tag{1.6}$$

Если точка x из $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ имеет координаты (z, w), тогда точка $\overline{x}$ (она также принадлежит $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$) имеет координаты $(1/\overline{z},\, 1/\overline{w})$. Вместе с (1.5), (1.6) это дает следующее

$$[x, \overline{x}] - 1 = 2\,\frac{(1-z\overline{z})(1-w\overline{w})}{|z-w|^2}, \tag{1.7}$$

$$[x, \overline{x}] + 1 = 2\left|\frac{1-z\overline{w}}{z-w}\right|^2. \tag{1.8}$$

Кроме того, для мнимых частей мы имеем (это легко вычислить)

$$\operatorname{Im} x_1 = -\frac{z\overline{z} - w\overline{w}}{|z-w|^2}, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{Im}\frac{x_3}{x_2} = -\frac{1 - z\overline{z}\cdot w\overline{w}}{|1-zw|^2}. \tag{1.10}$$

В прямом произведении $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ рассмотрим 4 комплексных многообразия:

$$D \times D,\ D' \times D',\ D \times D',\ D' \times D. \tag{1.11}$$

Тор $S \times S$ содержится на границе каждого из них. Группа G_1 действует на $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ диагонально: $(z, w) \mapsto (z \cdot g, w \cdot g)$. Она сохраняет все эти многообразия (1.11). Но это пребразование не является транзитивным. Это видно уже из сравнения размерностей: размерность G_1 меньше размерности каждого многообразия ($3 < 4$). Более того, группа G_1 сохраняет $[x, \overline{x}]$, следовательно, согласно (1.8), она сохраняет, например,

$$J = \frac{[x, \overline{x}] + 1}{2} = \left|\frac{1-z\overline{w}}{z-w}\right|^2,$$

так что каждая G_1-орбита лежит на поверхности уровня $J = const$.

Лемма 1.1 *Следующие пары являются представителями G_1-орбит: $(-i\mu, i\mu)$, $0 \leqslant \mu < 1$, в $D \times D$; $(-i\mu, i\mu)$, $1 < \mu \leqslant \infty$, в $D' \times D'$; $(-i\mu, i\mu^{-1})$, $0 \leqslant \mu < 1$, в $D \times D'$; $(-i\mu, i\mu^{-1})$, $1 < \mu \leqslant \infty$, в $D' \times D$.*

Доказательство. Рассмотрим $D \times D$. Поскольку G_1 действует транзитивно на D, мы можем перевести первый элемент пары из $D \times D$ в нуль. Мы получаем пару $(0, \zeta)$, $\zeta \in D$. Теперь мы можем подействовать на эту пару стационарной подгруппой точки 0, т. е. диагональной подгруппой K_1 группы G_1. Она состоит из матриц g_1 с $a = \mathrm{e}^{i\alpha}, b = 0$. Они действуют как вращение на угол 2α вокруг нуля. Так что мы можем перевести ζ в ir, $0 \leqslant r < 1$. Таким образом, любая пара в $D \times D$ может быть переведена в пару $(0, ir)$, $0 \leqslant r < 1$. Эта пара может быть переведена в пару $(-i\mu,\, i\mu)$ из леммы посредством матрицы g_1 с $a = (1-\mu^2)^{-1/2}$, $b = i\mu(1-\mu^2)^{-1/2}$, где $r = 2\mu/(\mu^2+1)$. Аналогично мы рассматриваем остальные 3 случая. $\square$

Для всех μ, удовлетворяющих строгим неравенствам $0 < \mu < 1$ и $1 < \mu < \infty$ в лемме 1.1, стационарной подгруппой пары, указанной в лемме, является центр $\{\pm E\}$ группы G_1, так что G_1-орбиты этих пары диффеоморфны группе $G \simeq G_1/\{\pm E\}$ и имеют размерность 3.

Для $\mu = 0$ или $\mu = \infty$ стационарной подгруппой пар является диагональная подгруппа K_1, так что соответствующие G_1-орбиты диффеоморфны плоскости Лобачевского $\mathcal{L} = G_1/K_1$ и имеют размерность два. Для $D \times D$ и $D' \times D'$ эти двумерные орбиты являются диагоналями $\{z = w\}$, и для $D \times D'$ и $D' \times D$ они есть многообразия $\{z\overline{w} = 1\}$. В самом деле, матрица g_1 переводит пары $(0, 0)$, (∞, ∞), $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$ в пары (z, z), (w, w), (z, w), (w, z), соответственно, где $z = \overline{b}/\overline{a}$, $w = a/b$, так что $z\overline{w} = 1$. Кстати, инвариантность многообразия $z\overline{w} - 1 = 0$ относительно G_1 следует из того, что под действием матрицы g_1 функция $z\overline{w} - 1$ умножается на $\{(bz + \overline{a})(\overline{b}\overline{w} + a)\}^{-1}$.

Исключим эти двумерные орбиты из многообразий (1.11) и обозначим оставшиеся многообразия теми же символами с индексом 0, например, $(D \times D)_0$ и так далее. Для этих многообразий представителями G_1-орбит служат пары, указанные в лемме 1.1 с μ, удовлетворяющими неравенствам $0 < \mu < 1$ или $1 < \mu < \infty$.

Перейдем от $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ к $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ при помощи (1.3) и (1.4). Образы многообразий $(D \times D)_0$, $(D' \times D')_0$, $(D \times D')_0$, $(D' \times D)_0$ будут обозначаться как $\mathcal{Y}^+$, $\mathcal{Y}^-$, Ω^+, Ω^-, соответственно. Из (1.7) – (1.10) мы получаем следующее описание этих множеств (напомним, что они лежат в $\mathcal{X}^{\mathbb{C}} : [x, x] = 1$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}^+ &: \quad [x, \overline{x}] > 1, \quad \operatorname{Im} \frac{x_3}{x_2} < 0, \\
\mathcal{Y}^- &: \quad [x, \overline{x}] > 1, \quad \operatorname{Im} \frac{x_3}{x_2} > 0, \\
\Omega^+ &: \quad -1 < [x, \overline{x}] < 1, \quad \operatorname{Im} x_1 > 0, \\
\Omega^- &: \quad -1 < [x, \overline{x}] < 1, \quad \operatorname{Im} x_1 < 0,
\end{aligned}$$

Пары $(-i\mu, i\mu)$ и $(-i\mu, i\mu^{-1})$ переходят в точки в $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$, лежащие на кривых

$$y_t = (0, i \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t), \ \omega_t = (i \sin t, 0, \cos t), \tag{1.12}$$

где $\mu = \mathrm{e}^{-t}$, $\mu = \operatorname{tg}(\pi/4 - t/2)$, соответственно. Представителями G_1-орбит служат точки y_t с $t > 0$ и $t < 0$ для $\mathcal{Y}^+$ и $\mathcal{Y}^-$, соответственно, и точки ω_t с $0 < t < \pi/2$ и $-\pi/2 < t < 0$ для Ω^+ и Ω^-, соответственно.

Возьмем следующий базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $G^{\mathbb{C}}$ – комплексификация группы G. Она состоит из комплексных матриц третьего порядка, сохраняющих форму $[x, y]$ в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим следующие матрицы в $G^{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= \exp(itL_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & -i \operatorname{sh} t \\ 0 & i \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \qquad (1.13) \\
\delta_t &= \exp(itL_2) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & i \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Кривые (1.12) получаются при умножении точки $x^0 = (0, 0, 1) \in \mathcal{X}$ на эти матрицы, т.е. $y_t = x^0\gamma_t$, $\omega_t = x^0\delta_t$.

Следовательно, всякая точка x из $\mathcal{Y}^\pm$ есть $x^0\gamma_t g$, где $t > 0$ для $\mathcal{Y}^+$ и $t < 0$ для $\mathcal{Y}^-$, и всякая точка x из $\Omega^\pm$ есть $x^0\delta_t g$, где $0 < t < \pi/2$ для Ω^+ и $-\pi/2 < t < 0$ для Ω^-. Здесь g пробегает G.

Вернемся к G_1-орбитам пар $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$, которые были исключены из $D \times D'$ и $D' \times D$ соответственно. При отображении (1.3) пары $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$ переходят соответственно в точки $\omega_{\pi/2} = (i, 0, 0) = ix^1$ и $\omega_{-\pi/2} = (-i, 0, 0) = -ix^1$, где $x^1 = (1, 0, 0)$. Следовательно, отображение (1.3) переводит эти G_1-орбиты в G-орбиты точек ix^1 и $-ix^1$. Обе точки $\pm x^1$ принадлежат гиперболоиду $[x, x] = -1$. Он состоит из двух полостей $\mathcal{L}^\pm$, так что $x^1 \in \mathcal{L}^+$ и $-x^1 \in \mathcal{L}^-$. Следовательно, G-орбиты – это $i\mathcal{L}^\pm$. Они лежат на границе многообразий $\Omega^\pm$, соответственно. Каждая из них может быть отождествлена с плоскостью Лобачевского $\mathcal{L} = G_1/K_1 = G/K$.

Все четыре комплексных многообразия (с вещественной размерностью 4) $\mathcal{Y}^\pm$, $\Omega^\pm$ примыкают к однополостному гиперболоиду $\mathcal{X}$ (вещественной размерности 2). В свою очередь, каждое из двух многообразий Ω^+ и Ω^- примыкает к одной полости (к $i\mathcal{L}^+$ и $i\mathcal{L}^-$) двуполостного гиперболоида $[x, x] = -1$ (вещественной размерности 2). Для каждой плоскости Лобачевского $i\mathcal{L}^\pm$ многообразие $\Omega^\pm$ является *комплексной короной* (по Ахиезеру–Гиндикину).

Сопоставим каждой точке x многообразия $\mathcal{Y}^\pm$, $\Omega^\pm$ ее третью координату $x_3 \in \mathbb{C}$.

Лемма 1.2 *При отображении $x \mapsto x_3$ образом многообразия $\mathcal{Y}^\pm$ является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом $[-1, 1]$, образом многообразия $\Omega^\pm$ является вся комплексная плоскость с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.*

Доказательство. Для точки $x \in \mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ с координатами z, w, см. (1.3), мы имеем

$$\frac{x_3 + 1}{x_3 - 1} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \cdot \frac{1 - iw}{1 + iw}. \qquad (1.14)$$

Функция $z \mapsto \zeta = (1 + iz)/(1 - iz)$ отображает круг D на правую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$, а его внешность D' на левую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta < 0$. Следовательно, если $(z, w) \in D \times D$ или $(z, w) \in D' \times D'$, то обе дроби в правой части (1.14) пробегают либо левую, либо правую полуплоскость. Их произведение пробегает всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty, 0]$. Если к тому же $z \neq w$, то это произведение не равно 1. Следовательно, x_3 пробегает $\mathbb{C}$ без $[-1, 1]$.

Если $(z,w) \in D \times D'$ или $(z,w) \in D' \times D$, то обе дроби в правой части равенства (1.14) пробегают различные полуплоскости. Следовательно, их произведение пробегает всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом $[0,\ \infty)$, поэтому x_3 пробегает $\mathbb{C}$ без $(-\infty,\ -1]$ и $[1,\ \infty)$. Поскольку мы рассматриваем $\Omega^{\pm}$, но не $D \times D'$ и $D' \times D$, мы должны исключить в (1.14) пары (z,w), для которых $w = 1/\overline{z}$. Но это не делает образ меньше. В самом деле, если первая дробь в правой части равенства (1.14) имеет значение $r\mathrm{e}^{i\alpha}$, где $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, тогда вторая дробь имеет значение $-r^{-1}\mathrm{e}^{i\alpha}$, так что их произведение равно $-\mathrm{e}^{2i\alpha}$. Пересечение множеств этих точек по всем α пусто. $\square$

Пусть $M(y)$ – голоморфная функция на многообразии $\mathcal{Y}^{\pm}$, и пусть $N(x)$ – её предельные значения на гиперболоиде $\mathcal{X}$:

$$M(x) = \lim_{y \to x} M(y), \quad y \in \mathcal{Y}^{\pm},\ x \in \mathcal{X}.$$

Мы будем считать, что y стремится к x "по радиальному направлению т.е. если $y \in \mathcal{Y}^{\pm}$ и $x \in \mathcal{X}$ имеют орисферические координаты (z,w) и (u,v), соответственно, то

$$z = \mathrm{e}^{-t}u,\ w = \mathrm{e}^{-t}v \tag{1.15}$$

и $t \to \pm 0$. Эти равенства (1.15) дают (γ_t дается формулой (1.13)):

$$y = x\gamma_t. \tag{1.16}$$

Лемма 1.3 *Пусть $M(y)$ зависит только от y_3 : $M(y) = N(y_3)$. По лемме 1.2 функция $N(\lambda)$ аналитична на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по $[-1,\ 1]$. Тогда*

$$M(x) = N(x_3 \mp i0x_2).$$

Доказательство. Пусть y и x связаны между собой посредством (1.15). Тогда по (1.16) мы имеем

$$y_3 = -i\sinh t \cdot x_2 + \cosh t \cdot x_3.$$

Следовательно, $y_3 = -it \cdot x_2 + x_3 + o(t)$, когда $t \to 0$. Отсюда следует лемма. $\square$

Теперь пусть $M(\omega)$ – голоморфная функция на многообразии $\Omega^{\pm}$ и пусть $M(x)$ – её предельные значения на гиперболоиде $\mathcal{X}$:

$$M(x) = \lim_{y \to x} M(\omega).$$

Здесь мы подобным образом предполагаем, что ω стремится к x "по радиальному направлению т.е. если $\omega \in \Omega^{\pm}$ и $x \in \mathcal{X}$ имеют орисферические координаты (z,w) и (u,v) соответственно, то

$$z = \mathrm{e}^{-t}u,\ w = \mathrm{e}^{t}v \tag{1.17}$$

и $t \to \pm 0$.

Лемма 1.4 *Пусть $M(\omega)$ зависит только от ω_3 : $M(\omega) = N(\omega_3)$. По лемме 1.2 функция $N(\lambda)$ аналитична на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами $(-\infty,\, -1]$ и $[1,\, \infty)$. тогда*

$$M(x) = N(x_3 \pm i0 \cdot x_1 x_3) \tag{1.18}$$

Доказательство. По (1.17) и (1.18) мы имеем

$$\omega_3 = \frac{1+uv}{i(\mathrm{e}^{-t}u - \mathrm{e}^{t}v)}.$$

Подставим сюда выражения u, v через x, см. (1.2). Принимая во внимание равенство $x_1^2 + 1 = (x_3 + ix_2)(x_3 - ix_2)$, мы получим

$$\omega_3 = \frac{x_3}{\operatorname{ch} t - i \operatorname{sh} t \cdot x_1}. \tag{1.19}$$

При $t \to 0$ это ведёт себя как $x_3(1+itx_1)$ с точностью до членов порядка t^2. Это доказывает лемму. $\square$

Все это удобно представить, используя конус в $\mathbb{C}^4$. Снабдим $\mathbb{C}^4$ билинейной формой

$$[[x,\, y]] = -x_0y_0 - x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

(мы добавляем к векторам x из $\mathbb{C}^3$ координату x_0). Пусть $\mathcal{C}$ – конус в $\mathbb{C}^4$, заданный условиями $[[x,\, x]] = 0$, $x \neq 0$. Тогда комплексный гиперболоид $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ есть сечение конуса $\mathcal{C}$ гиперплоскостью $x_0 = 1$. Имея в виду (1.3), рассмотрим множество $\mathcal{Z}$, состоящее из точек

$$\zeta = \frac{1}{2}\Big(i(z-w),\, z+w,\, i(1-zw),\, 1+zw\Big), \tag{1.20}$$

где $z, w \in \mathbb{C}$. Это есть сечение конуса $\mathcal{C}$ гиперплоскостью $-ix_2 + x_3 = 1$, т.е. гиперплоскостью $[x,\, \xi^0] = 1$, где $\xi^0 = (0, 0, , -i, 1)$. Отображение $\zeta \mapsto x = \zeta/\zeta_0$ переводит $\mathcal{Z} \backslash \{z = w\}$ в $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$, оно дает как раз орисферические координаты.

Многообразия (1.11) без точек, соответствующих ∞, лежат в $\mathcal{Z}$: для того чтобы получить $D \times D$ или $D' \times D'$ нужно к неравенству $[\zeta,\, \overline{\zeta}] > 0$ добавить неравенство $\operatorname{Im}(\zeta_3/\zeta_2) < 0$ или $\operatorname{Im}(\zeta_3/\zeta_2) > 0$, соответственно, а для того чтобы получить $D \times D'$ или $D' \times D$, нужно к неравенству $[\zeta,\, \overline{\zeta}] < 0$ добавить условие, что мнимая часть определителя

$$\begin{vmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ \overline{\zeta}_0 & \overline{\zeta}_1 \end{vmatrix}$$

отлична от нуля.

[Заметим, что только что данное определение многообразия $D \times D$, есть в сущности определение области Картана IV типа $D(p)$ для $p = 2$. В самом деле, $D(p)$ определяется следующим образом. Снабдим пространство $\mathbb{C}^n$, $n = p + 2$, формой $[x, x] = -x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2$. Пусть $\xi^0 = (0, \ldots, 0, -i, 1)$. Тогда $D(p)$ состоит из точек $\zeta \in \mathbb{C}^n$ таких, что

$$[\zeta,\, \zeta] = 0,\ [\zeta,\, \overline{\zeta}] > 0,\ [\zeta,\, \xi^0] = 1,\ \operatorname{Im}(\zeta_n/\zeta_{n-1}) < 0.$$

Всякая точка $\zeta \in D(p)$ может быть записана как

$$\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \frac{a-1}{2i}, \frac{a+1}{2}),\ a = \zeta_1^2 + \ldots + \zeta_p^2,$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ удовлетворяют неравенствам:

$$\zeta_1\overline{\zeta}_1 + \ldots \zeta_p\overline{\zeta}_p < \frac{a\overline{a}+1}{2} < 1,$$

так что $D(p)$ может быть отождествлено с ограниченной областью в $\mathbb{C}^p$.]

Поставим в соответствие точке $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ из $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$x = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Её определитель равен $-[[x,\ x]]$. В частности, для точки $\zeta \in \mathcal{Z}$, задаваемой (1.20), получается матрица

$$\zeta = i \begin{pmatrix} z & 1 \\ -zw & -w \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы ζ характеризуются тем, что $\det \zeta = 0$, $\zeta_{12} = i$.

Группа $G_1 \times G_1$ действует на пространстве матриц (1.21): элементу (g_1, g_2) из $G_1 \times G_1$ отвечает линейное преобразование:

$$x \mapsto g_1^{-1} x g_2. \tag{1.22}$$

Оно задаётся *вещественной* матрицей порядка 4. Мы получаем гомоморфизм группы $G_1 \times G_1$ на группу $\mathrm{SO}_0(2,2)$. Ядро является группой порядка 2, состоящей из пар $(E,\ E)$, $(-E,\ -E)$. Диагональ группы $G_1 \times G_1$, т.е. множество пар $(g,\ g)$, $g \in G_1$, переходит в подгруппу $\mathrm{SO}_0(1,2) = G$, она сохраняет $x^0 = (1/2)\operatorname{tr} x$.

Рассмотрим следующее действие $G_1 \times G_1$ на $\mathcal{Z}$:

$$\zeta \mapsto \frac{g_1^{-1}\zeta g_2}{-i(g_1^{-1}\zeta g_2)_{12}}$$

(сначала применянм линейное преобразование (1.22) и затем возвращаемся на сечение $\mathcal{Z}$ вдоль прямой, проходящей через начало координат). Это есть дробно-линейное действие:

$$z \mapsto z \cdot g_2, \quad w \mapsto w \cdot g_1.$$

Гомоморфизм $G_1 \times G_1 \to \mathrm{SO}_0(2,2)$ может быть распространён на комплексификации (мы получаем гомоморфизм $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(4,\mathbb{C})$). Возьмём в комплексификации

$G_1^{\mathbb{C}} \times G_1^{\mathbb{C}}$ пары $(\exp(itL_0), \exp(itL_0))$ и $(\exp(-itL_0), \exp(itL_0))$. При указанном выше гомоморфизме эти пары перейдут в матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh t & -i\sinh t \\ 0 & 0 & i\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh t & i\sinh t & 0 & 0 \\ i\sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первая матрица получается с помощью окаймления матрицы γ_t, см. (1.13). Вторая появляется в доказательстве леммы 1.4. В самом деле, умножим вектор (строку) $(1, x_1, x_2, x_3)$ из $\mathcal{C}$ такую, что вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежит $\mathcal{X}$, на эту матрицу и затем разделим на координату с индексом нуль, мы как раз получим вектор $\omega \in \Omega^{\pm}$, чьи орисферические координаты связаны с орисферическими координатами x с помощью (1.17), а именно

$$\omega = \frac{1}{\operatorname{ch} t - ix_1 \cdot i \operatorname{sh} t} \left(x_1 \cdot \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t,\ x_2, x_3\right). \tag{1.23}$$

Это включает в себя (1.19). Кривая (1.23) с $x = x^0 = (0, 0, 1)$, т.е. кривая $(i \operatorname{th} t, 0, 1/\operatorname{ch} t)$, есть в сущности кривая ω_t, см. (1.12), с другим параметром.

В заключение сделаем ещё одно замечание по поводу многообразий $\mathcal{Y}^{\pm}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_0 \\ \xi_2 & \xi_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Форма Киллинга $B(X, Y)$ есть $\operatorname{tr}(XY)$, так что $B(X, X) = 2(-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2)$. Рассмотрим в $\mathfrak{g}$ два световых конуса (прямой и обратный) C^+ и C^- определённые неравенствами $-\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2 < 0$, $\pm\xi_0 > 0$. Эти области инвариантны относительно $\operatorname{Ad} G$. В комплексификации $G^{\mathbb{C}}$ возьмём два множества $\exp(iC^{\pm})$. Оказывается, что

$$\mathcal{Y}^{\pm} = \mathcal{X} \cdot \exp(iC^{\pm}).$$

Кроме того, оказывается, что подмножества $\Gamma^{\pm} = G \cdot \exp(iC^{\pm})$ из $G^{\mathbb{C}}$ являются *полугруппами* (Ольшанский). Эти утверждения можно доказать, используя следующие факты: a) Для любых γ_t и a_μ ($a_\mu = \exp \mu L_2$) существуют γ_s и a_λ такие, что

$$x^0 \gamma_t a_\mu = x^0 a_\lambda \gamma_s;$$

b) разложение Картана-Берже $g = hak$; c) разложение Картана $g = k_1 a k_2$.

§ 2. Аналитическое продолжение сферических функций непрерывной серии

В этом параграфе мы строим аналитическое продолжение сферических функций непрерывной серии на комплексные многообразия $\Omega^\pm$, определенные в предыдущем параграфе.

Сферические функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$ на гиперболоиде $\mathcal{X}$ были вычислены, например, в [4]. Они являются линейными комбинациями функций Лежандра первого типа от $\pm x_3$ (x_3 – это третья координата вектора x):

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x) = -\frac{2\pi}{\sin\sigma\pi}\left[P_\sigma(-x_3) + (-1)^\varepsilon P_\sigma(x_3)\right]. \tag{2.1}$$

Функция Лежандра $P_\sigma(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty,\ -1]$. На разрезе мы определяем функцию Лежандра как полусумму предельных значений сверху и снизу:

$$P_\sigma(c) = \frac{1}{2}\left[P_\sigma(c+i0) + P_\sigma(c-i0)\right],\ c < -1.$$

Следовательно, линейная комбинация $P_\sigma(-z)+(-1)^\varepsilon P_\sigma(z)$ аналитична в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами $(-\infty,\ -1]$ и $[1,\ \infty)$. Именно эти разрезы появляются в леммах 1.2 и 1.4 при обсуждении комплексного многообразия $\Omega^\pm$. Поэтому мы рассмотрим функции на $\Omega^\pm$, определённые той же формулой (2.1) с ω вместо x:

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega) = -\frac{2\pi}{\sin\sigma\pi}\left[P_\sigma(-\omega_3) + (-1)^\varepsilon P_\sigma(\omega_3)\right]. \tag{2.2}$$

Эти функции аналитичны на $\Omega^\pm$. Найдем их предельные значения на $\mathcal{X}$.

Сначала рассмотрим функцию $P_\sigma(\omega_3)$ на $\Omega^\pm$. По лемме 1.4 её предельные значения на $\mathcal{X}$ таковы:

$$\begin{aligned} \lim P_\sigma(\omega_3) &= P_\sigma(x_3),\ x_3 > -1 \\ &= P_\sigma(x_3 \mp i0x_1),\ x_3 < -1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\omega \to x$ и $\omega \in \Omega^\pm$. На разрезе $(-\infty,\ -1]$ функция $P_\sigma(z)$ имеет следующие предельные значения (см. [1] 3.3 (10)):

$$P_\sigma(c \pm i0) = \mathrm{e}^{\pm i\sigma\pi} P_\sigma(-c) - \frac{2}{\pi}\sin\sigma\pi \cdot Q_\sigma(-c), \quad c < -1,$$

где Q_σ – функция Лежандра второго рода. Следовательно, по (2.3) для $\omega \to x$, $\omega \in \Omega^\pm$ и $x_3 < -1$ мы имеем :

$$\begin{aligned} \lim P_\sigma(\omega_3) &= \mathrm{e}^{\mp i\sigma\pi} P_\sigma(-x_3) - \frac{2}{\pi}\sin\sigma\pi Q_\sigma(-x_3),\ x_1 > 0, \\ &= \mathrm{e}^{\pm i\sigma\pi} P_\sigma(-x_3) - \frac{2}{\pi}\sin\sigma\pi Q_\sigma(-x_3),\ x_1 < 0. \end{aligned}$$

Это можно переписать так:

$$\lim P_\sigma(\omega_3) = P_\sigma(c) \mp \operatorname{sgn} x_1 \cdot i\sin\sigma\pi \cdot P_\sigma(-x_3).$$

Мы видим, что предельные значения $P_\sigma(\omega_3)$ при $\omega \to x$ совпадают с $P_\sigma(x_3)$ только для $x_3 > -1$. Для того чтобы получить $P_\sigma(x_3)$, следует взять полусумму предельных значений из *обоих* многообразий Ω^+ и Ω^-.

Аналогично мы рассуждаем для $P_\sigma(-x_3)$.

Таким образом, предельные значения на $\mathcal{X}$ функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega)$ на $\Omega^\pm$, определённой с помощью (2.2), совпадают с предельными значениями функций $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x)$ только для $-1 < x_3 < 1$. Сферические функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x)$ *четны* по x_1, но предельная функция $\lim \Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega)$ *таковой не является.* Чтобы получить сферическую функцию $\Psi_\sigma(x)$ из функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega)$, нужно использовать *оба* многообразия $\Omega^\pm$ и взять полусумму предельных значений из Ω^+ и Ω^-:

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\pm} \lim \Psi_{\sigma,\varepsilon}(\omega),$$

где предел берётся при $\omega \to x$, $\omega \in \Omega^\pm$, $x \in \mathcal{X}$.

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.

2. В. Ф. Молчанов. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского. Функц. анализ и его прил., 1980, том 14, вып. 2. 73–74.

3. V. F. Molchanov. Holomorphic discrete series for hyperboloids of Hermitian type. J. Funct. Anal., 1997, vol. 147, No. 1, 26–50

4. V. F. Molchanov. Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–204.

УДК 517.98

Дифференциальная формула для преобразования Пуассона [8]

© В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова

Ключевые слова: симплектические многообразия, пара-эрмитовы пространства, представления, сплетающие операторы.

Дается разложение тензорного произведения конечномерного представления группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ из максимально вырожденной серии и контраградиентного представления.

[8]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.